
Funciones: Conceptos Generales

Notas de Clase

Asignatura: Matemática T

5 de Mayo de 2026

Basado en: Stewart (Precalculus), Larson & Hostetler (Precalculus), Sullivan (Precalculus), Swokowski & Cole (Precalculus)

Contents

1	Introducción: relaciones y dependencia	2
1.1	Relaciones	2
2	Función: definición y notación	3
2.1	Definición formal	3
2.2	Representación sagital	3
2.3	Variable independiente y dependiente	4
3	Dominio de una función	4
3.1	Dominio natural	4
3.2	Restricciones al dominio	5
3.3	Dominio a partir del gráfico	7
4	Imagen (rango) de una función	8
4.1	Cálculo de valores funcionales	8
4.2	Imagen a partir del gráfico	9
5	El gráfico de una función	9
5.1	El plano cartesiano	9
5.2	Prueba de la recta vertical	10
6	Funciones elementales y sus gráficos	10
6.1	Función constante	10
6.2	Función identidad y funciones lineales	11
6.3	Función valor absoluto	12
6.4	Función cuadrática (parábola)	12
6.5	Función cúbica y potencias	13
6.6	Función raíz cuadrada y cúbica	14
6.7	Función racional elemental	14
7	Transformaciones de funciones	14
7.1	Traslación vertical	15
7.2	Traslación horizontal	16
7.3	Reflexiones	16
7.4	Escalados (cambios de escala)	17
7.5	Transformación de valor absoluto	18
7.6	Combinaciones de transformaciones	19
8	Funciones monótonas: crecimiento y decrecimiento	20
9	Máximos y mínimos relativos (locales)	21
10	Funciones definidas a trozos	21
11	Operaciones con funciones	23
11.1	Composición de funciones	23
12	Síntesis: propiedades de las funciones elementales	25
	Bibliografía y referencias	26

1. Introducción: relaciones y dependencia

En la vida cotidiana y en las ciencias observamos con frecuencia que una magnitud depende de otra. Estas dependencias pueden expresarse matemáticamente mediante el concepto de **función**, uno de los más importantes y unificadores de toda la matemática.

Algunos ejemplos intuitivos:

- El área de un círculo depende de su radio: $A = \pi r^2$.
- La temperatura corporal de un paciente depende del tiempo transcurrido.
- El precio de un producto depende de la cantidad demandada.
- La posición de un proyectil depende del tiempo.

En todos estos casos existe una **relación** entre dos conjuntos.

En el transcurso de esta materia vamos a estudiar funciones de números reales: funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. A simple vista, parecen un tema abstracto y alejado de la **programación**, pero en realidad las funciones matemáticas son el modelo teórico directo de lo que hace una función en programación.

En programación, casi todo lo que hacemos es manipular datos a través de procesos lógicos, y ahí es donde la matemática elemental se convierte en la mejor herramienta.

En matemáticas, una función f asigna a cada valor de entrada x (dominio) un único valor de salida $f(x)$ (imagen). En programación, una *función* (o método) recibe parámetros (**entradas**) y devuelve un resultado (**salida**).

Esta correspondencia directa permite entender que **programar funciones es implementar modelos matemáticos de transformación de datos**.

Antes de definir formalmente función, conviene estudiar la noción más general de relación.

1.1. Relaciones

Definición — Relación entre conjuntos

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una **relación** R de A en B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Es decir,

$$R \subseteq A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Si $(a, b) \in R$, se escribe $a R b$ y se dice que “ a está relacionado con b ”.

Ejemplo — Relación no funcional

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. La regla “ x se relaciona con y si x es impar” define la relación:

$$R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}.$$

Aquí el elemento $1 \in A$ se relaciona con más de un elemento de B .

Una función es una relación con una restricción fundamental: cada elemento del dominio tiene exactamente una imagen.

2. Función: definición y notación

2.1. Definición formal

Definición — Función

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una **función** f de A en B , escrita $f : A \rightarrow B$, es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ **exactamente un** elemento $f(x) \in B$.

- A se llama el **dominio** de f y se denota $\text{Dom}(f)$.
- El conjunto $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ se llama **imagen** o **rango** de f y se denota $\text{Img}(f)$.
- B se llama el **codominio** de f .
- Para cada $x \in A$, el valor $f(x)$ se llama la **imagen de x** bajo f , o el **valor funcional** en x .

Nota importante

La definición requiere dos condiciones:

1. **Existencia:** todo $x \in A$ tiene al menos una imagen $f(x)$.
2. **Unicidad:** cada $x \in A$ tiene exactamente una imagen. Si $x_1 = x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

Si alguna de estas condiciones falla, la regla **no** define una función.

2.2. Representación sagital

La representación sagital (o diagrama de flechas) ilustra visualmente la asignación. Cada elemento del dominio está conectado por exactamente una flecha a su imagen en el codominio.

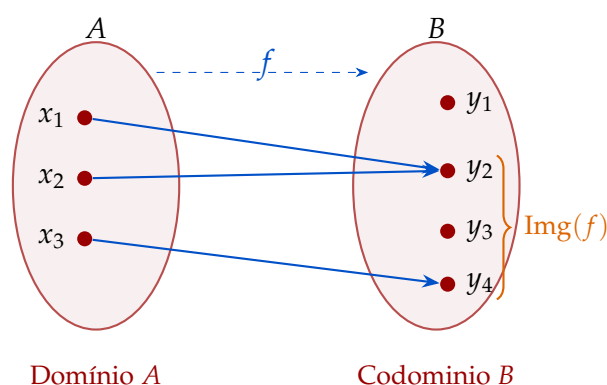


Figura 1. Representación sagital de una función $f : A \rightarrow B$. Notar que y_1 e y_3 no son imagen de ningún elemento, por lo que $\text{Img}(f) \subsetneq B$.

Condición clave: unicidad de la imagen

En el diagrama anterior, si dos elementos distintos de A apuntan al mismo elemento de B , eso está permitido. Lo que **no** está permitido es que un elemento de A tenga **dos flechas distintas** (dos imágenes diferentes).

Ejemplo — Verificar si una regla es función

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Caso i) Regla dada por la tabla:

x	a	b	c
$f(x)$	2	2	4

Sí es función: cada elemento de A tiene exactamente una imagen. (Que a y b compartan imagen es lícito.)

Caso ii) Regla dada por:

$$g(a) = \{1, 3\}, g(b) = 2, g(c) = 4$$

No es función: al elemento a se le asignan dos valores, 1 y 3.

Caso iii) Regla que deja a c sin imagen asignada.

No es función: $c \in A$ no tiene imagen (viola la existencia).

2.3. Variable independiente y dependiente

Cuando escribimos $y = f(x)$:

- x es la **variable independiente** (entrada, input): toma valores en $\text{Dom}(f)$.
- y es la **variable dependiente** (salida, output): su valor *depende* de x .

La expresión $y = f(x)$ se lee “ y es igual a f de x ”. La letra f es el *nombre* de la función; la expresión $f(x)$ es el *valor* que toma la función en x .

Nota importante

No confundir f (la función, la regla) con $f(x)$ (el valor numérico que resulta de aplicar la regla a x). Esta distinción, aunque sutil, es fundamental en análisis matemático.

3. Dominio de una función**3.1. Dominio natural**

Cuando una función de variable real está dada por una expresión algebraica sin especificar explícitamente su dominio, se adopta como convención que el **dominio natural** (o implícito) es el conjunto más grande de números reales para los cuales la expresión está bien definida (tiene sentido).

Definición — Dominio natural

Dada $f(x)$, el dominio natural de f es

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ está definido}\}.$$

3.2. Restricciones al dominio

Las principales situaciones que **excluyen** valores del dominio son:

- 1. Denominador nulo.** Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, se requiere $q(x) \neq 0$.
- 2. Radicando negativo (índice par).** Si $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, se requiere $g(x) \geq 0$.
- 3. Logaritmo de argumento no positivo.** Si $f(x) = \log g(x)$, se requiere $g(x) > 0$ (ver unidades posteriores).
- 4. Combinaciones.** Si la función combina varias de las situaciones anteriores, todas las restricciones deben cumplirse simultáneamente.

Procedimiento para hallar el dominio natural:

- Identificar todas las expresiones que puedan causar problemas (denominadores, radicales con índice par, logaritmos).
- Para cada una plantear y resolver la inecuación correspondiente.
- El dominio es la intersección de todos los conjuntos permitidos.
- Expresar el resultado en notación de conjuntos o de intervalos.

Ejemplo — Dominio de funciones polinomiales y racionales

a) $f_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Los polinomios están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Dom}(f_1) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

b) $f_2(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

Condición: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

$$\text{Dom}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty).$$

c) $f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

Factorizando: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Condición: $(x - 2)(x - 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ y $x \neq 3$.

$$\text{Dom}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

d) $f_4(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$.

Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el denominador nunca se anula.

$$\text{Dom}(f_4) = \mathbb{R}.$$

Ejemplo — Dominio con radicales

a) $f(x) = \sqrt{4-x}$.

Condición: $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$.

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 4].$$

b) $g(x) = \sqrt{x^2-9}$.

Condición: $x^2-9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$. Esto ocurre cuando $x \leq -3$ o $x \geq 3$.

$$\text{Dom}(g) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty).$$

c) $h(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)(x-5)}$.

Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 5)$	5	$(5, \infty)$
$x-1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+	+	+
$x-5$	-	-	-	-	-	0	+
Producto	-	0	+	0	-	0	+

El producto es ≥ 0 en $[1, 3] \cup [5, +\infty)$.

$$\text{Dom}(h) = [1, 3] \cup [5, +\infty).$$

d) $p(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Necesitamos: $x+2 \geq 0$ (radicando ≥ 0) y $x \neq 1$ (denom. $\neq 0$). La primera condición da $x \geq -2$. La segunda excluye $x = 1$.

$$\text{Dom}(p) = [-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

e) $q(x) = \sqrt[3]{2x-7}$.

La raíz cúbica está definida para todo real.

$$\text{Dom}(q) = \mathbb{R}.$$

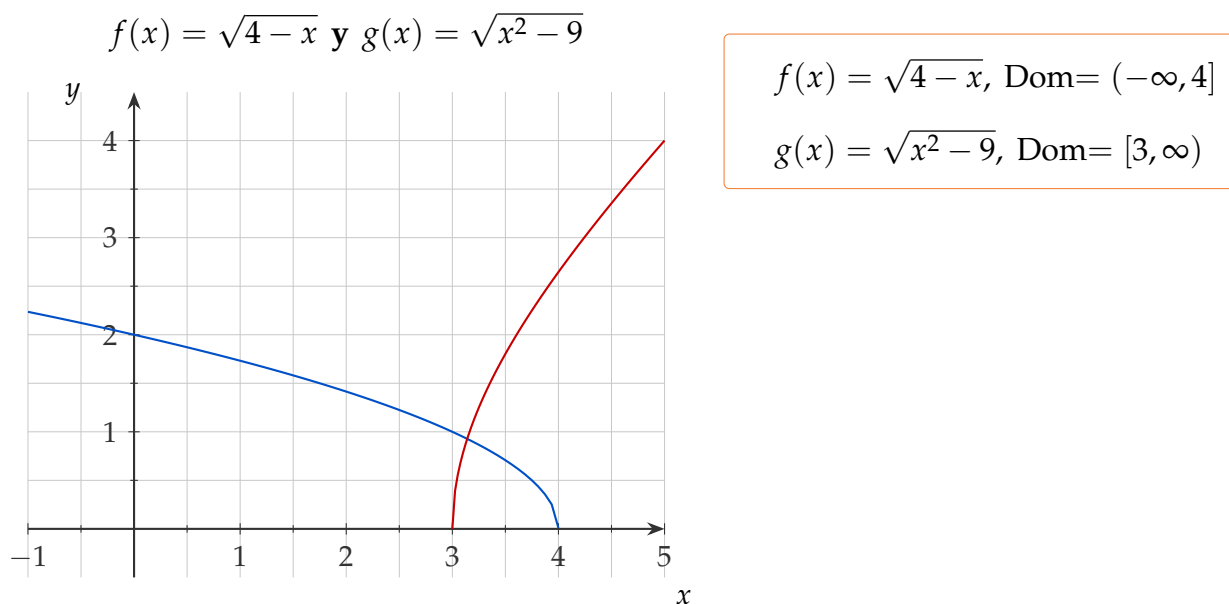


Figura 2. Visualización del dominio. Notar dónde empieza y termina cada curva.

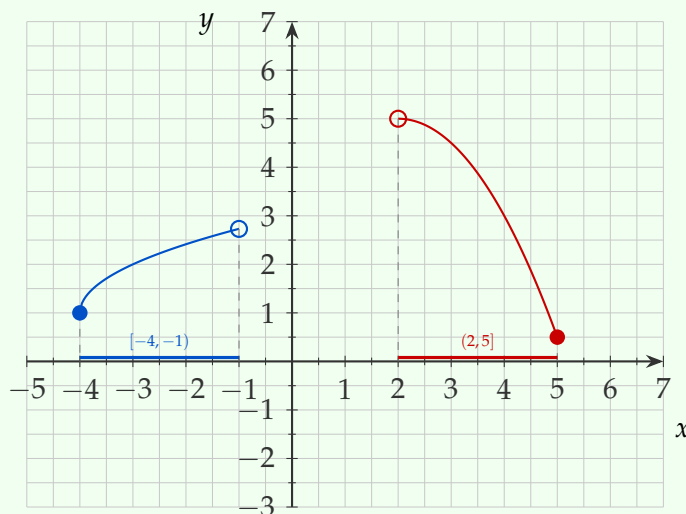
3.3. Dominio a partir del gráfico

Cuando se conoce el gráfico de f , el dominio se obtiene proyectando todos los puntos del gráfico sobre el eje x y tomando la unión de los intervalos resultantes.

Lectura del dominio en el gráfico

- Un **punto sólido** (\bullet) en un extremo indica que ese valor **sí pertenece** al dominio (intervalo cerrado $[]$).
- Un **punto hueco** (\circ) en un extremo indica que ese valor **no pertenece** al dominio (intervalo abierto $()$).
- Una **flecha** indica que el gráfico continúa indefinidamente ($\pm\infty$).

Ejemplo — Dominio a partir del gráfico

Gráfico de f (Ejemplo: lectura del dominio)Figura 3. $\text{Dom}(f) = [-4, -1) \cup (2, 5]$.

4. Imagen (rango) de una función

Definición — Imagen de una función

Dada $f : A \rightarrow B$, la **imagen** de f es el conjunto de todos los valores que la función efectivamente toma:

$$\text{Img}(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y\} \subseteq B.$$

4.1. Cálculo de valores funcionales

Para calcular $f(a)$, se reemplaza x por a en la expresión de $f(x)$ y se simplifica.

Ejemplo — Cálculo de valores funcionales

Sea $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a) $f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$.

b) $f(2) = 2(4) - 6 + 1 = 3$.

c) $f(-1) = 2(1) + 3 + 1 = 6$.

d) $f(a) = 2a^2 - 3a + 1$.

e) $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 1$.

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 1) - (2x^2 - 3x + 1)}{h} = \\ \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} &= 4x + 2h - 3 \text{ (para } h \neq 0\text{)}. \end{aligned}$$

El cálculo del inciso f) se denomina **cociente de diferencias** y tiene gran importancia en cálculo diferencial.

Ejemplo — Evaluación con expresiones algebraicas

Sea $g(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$. Calcular $g\left(\frac{1}{t}\right)$ y $g(t^2)$.

$$\text{a) } g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1+t^2}{t^2}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} = g(t).$$

$$\text{b) } g(t^2) = \frac{t^2}{t^4 + 1}.$$

4.2. Imagen a partir del gráfico

Análogamente al dominio, la imagen se obtiene proyectando los puntos del gráfico sobre el **eje y** .

Ejemplo — Imagen a partir del gráfico

Para el gráfico de la figura anterior con $\text{Dom}(f) = [-4, -1) \cup (2, 5]$, se proyectan los puntos sobre el eje y . Sea, por ejemplo, $\text{Img}(f) = [1, \sqrt{3} + 1) \cup (0, 5]$. (Los valores exactos dependen de la función particular; el procedimiento es siempre proyectar sobre el eje y y unir los intervalos obtenidos.)

5. El gráfico de una función

Definición — Gráfico de una función

El **gráfico** de $f : A \rightarrow B$ es el conjunto de pares ordenados:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \text{Dom}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Cada par $(x, f(x))$ se representa como un punto del plano cartesiano.

5.1. El plano cartesiano

El plano cartesiano (o sistema de coordenadas rectangulares) está formado por:

- El **eje de abscisas** (eje x): recta horizontal.
- El **eje de ordenadas** (eje y): recta vertical.
- El **origen** $O = (0, 0)$: intersección de ambos ejes.
- Cuatro **cuadrantes**: I, II, III, IV (sentido antihorario desde el I).

5.2. Prueba de la recta vertical

Teorema: Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano cartesiano es el gráfico de una **función** de variable real si y solo si **toda** recta vertical interseca la curva en a lo sumo un punto.

Justificación intuitiva: Si una recta vertical $x = a$ cortase la curva en dos puntos (a, y_1) y (a, y_2) con $y_1 \neq y_2$, entonces al mismo valor de entrada $x = a$ le corresponderían dos valores de salida distintos, violando la unicidad.

Ejemplo — Prueba de la recta vertical

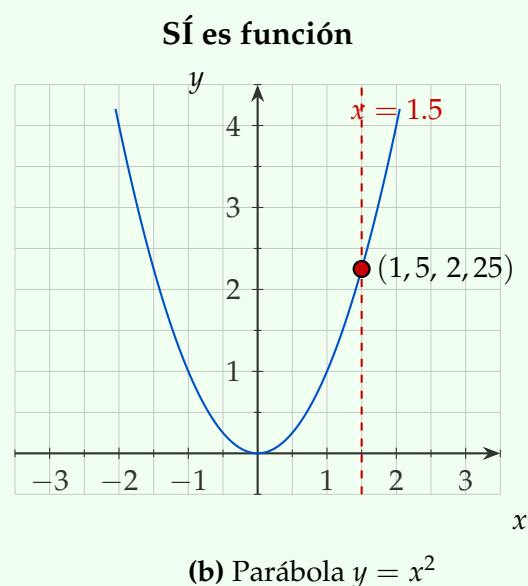
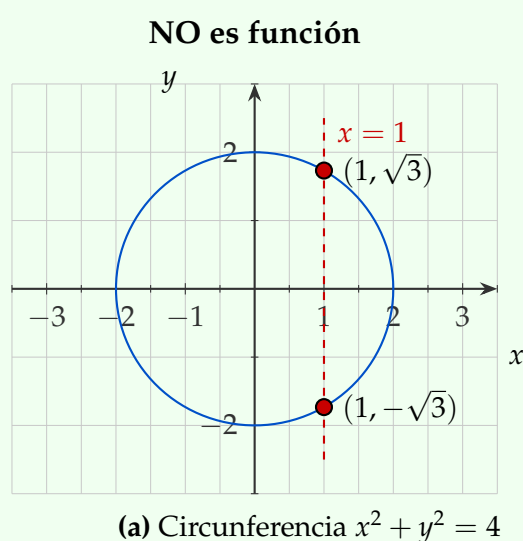


Figura 4. Prueba de la recta vertical.

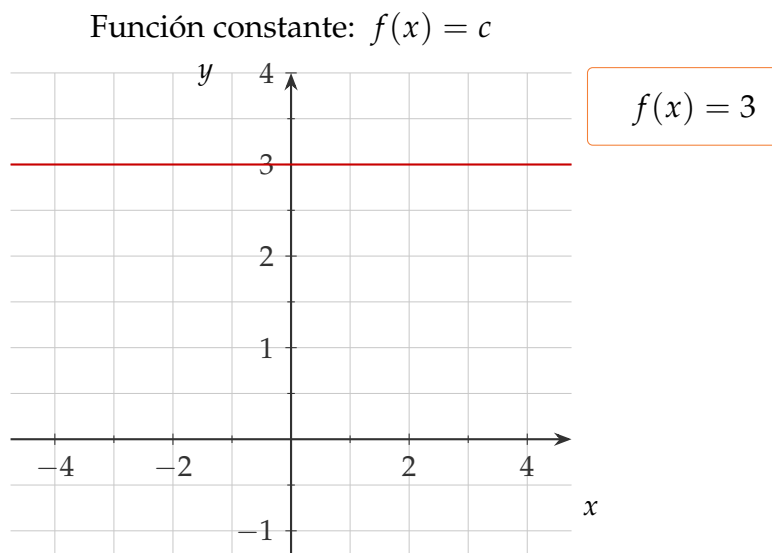
6. Funciones elementales y sus gráficos

A continuación presentamos las funciones básicas que forman la base de todas las demás. Es fundamental conocer su forma, dominio, imagen y propiedades.

6.1. Función constante

$f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ fijo.

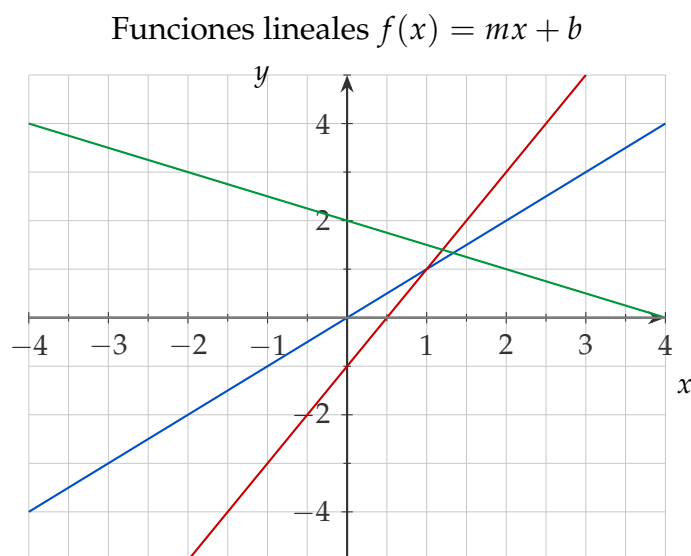
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. $\text{Img}(f) = \{c\}$.
- Gráfico: recta horizontal a altura c .



6.2. Función identidad y funciones lineales

$f(x) = x$ (identidad); en general $f(x) = mx + b$ (lineal).

- Dom = \mathbb{R} , Img = \mathbb{R} .
- m = pendiente; b = ordenada al origen.



- $f(x) = x$ ($m = 1, b = 0$)
- $g(x) = 2x - 1$ ($m = 2, b = -1$)
- $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ($m = -\frac{1}{2}, b = 2$)
- $k(x) = 0$ (constante)

Figura 5. Diversas funciones lineales. La pendiente determina la inclinación.

6.3. Función valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Dom = \mathbb{R} . Img = $[0, +\infty)$.
- Vértice en $(0,0)$. Simétrica respecto del eje y .

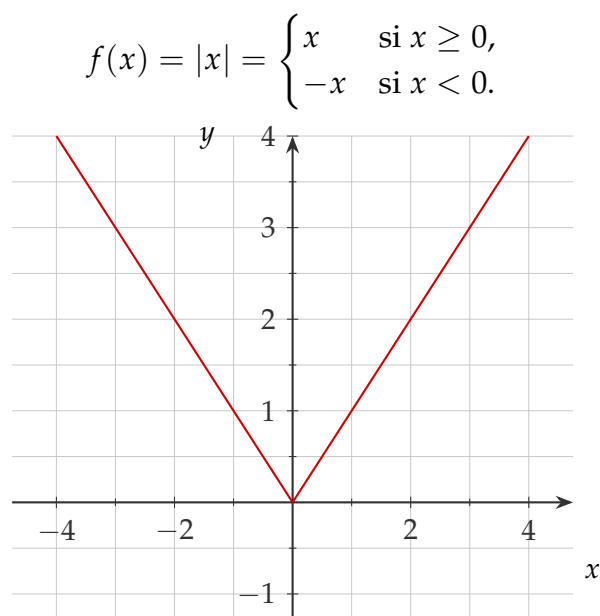


Figura 6. Función Valor Absoluto.

6.4. Función cuadrática (parábola)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

- Dom = \mathbb{R} .
- Si $a > 0$: abre hacia arriba; Img = $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$.
- Si $a < 0$: abre hacia abajo; Img = $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.
- Vértice en $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

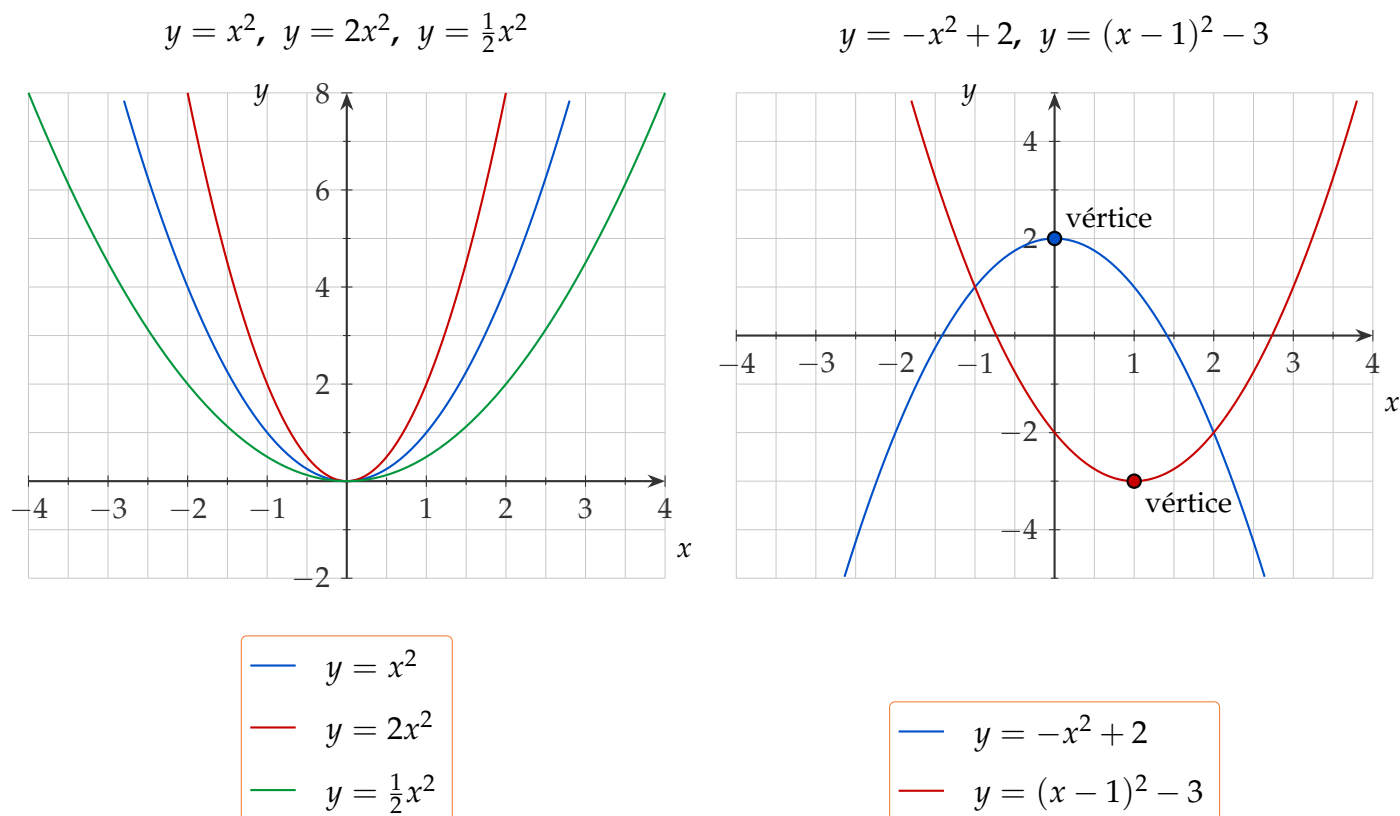


Figura 7. Parábolas: efecto del coeficiente a y las traslaciones.

6.5. Función cúbica y potencias

$f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

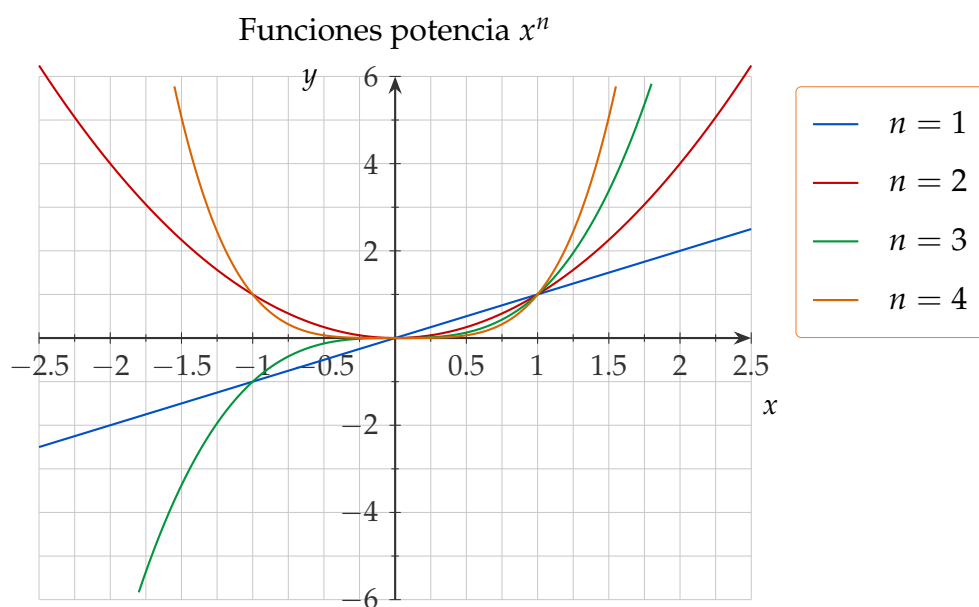


Figura 8. Comparación de potencias. Las de exponente par son simétricas respecto del eje y ; las de exponente impar son simétricas respecto del origen.

6.6. Función raíz cuadrada y cúbica

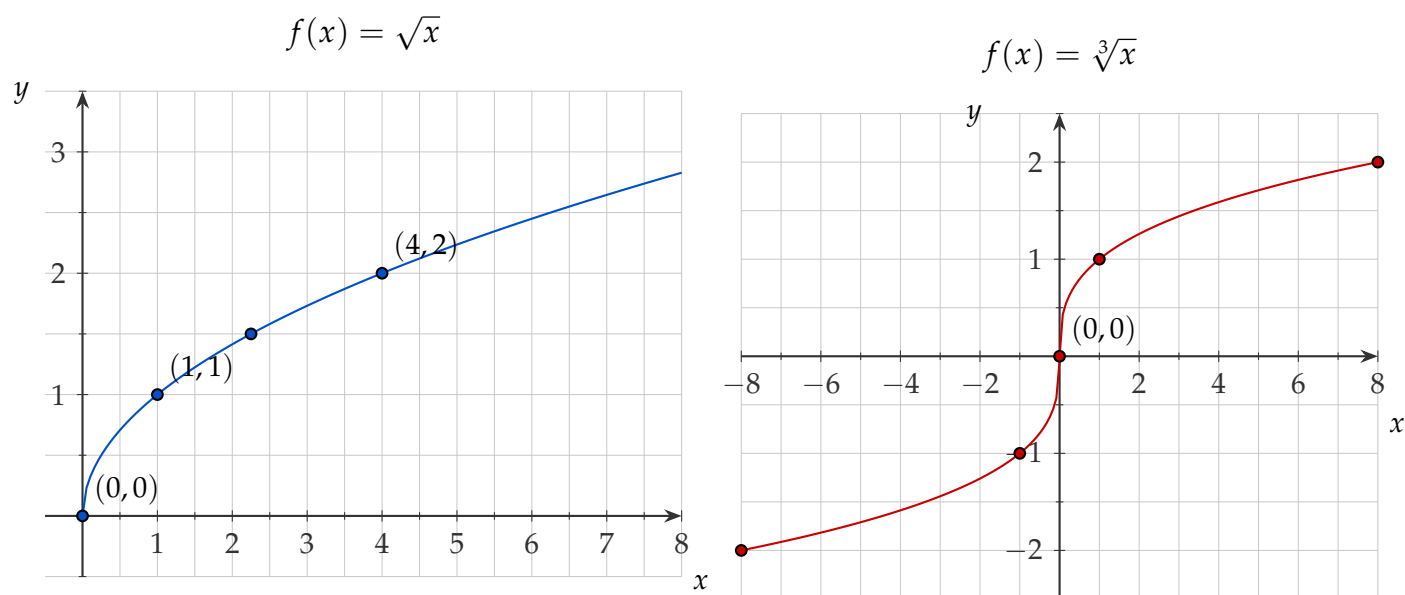


Figura 9. Raíz cuadrada (dominio $[0, \infty)$) y raíz cúbica (dominio \mathbb{R}).

6.7. Función racional elemental

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

- Dom = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Img = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Asíntotas: $x = 0$ (vertical) e $y = 0$ (horizontal).

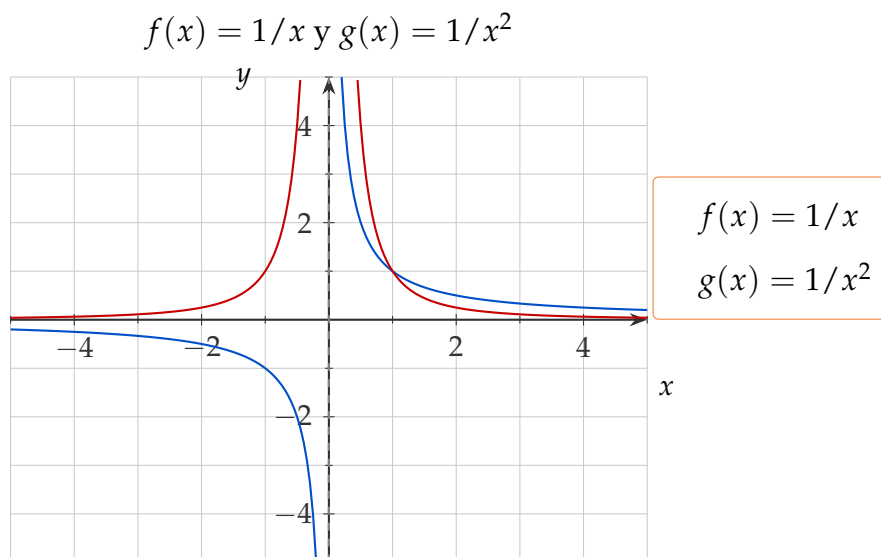


Figura 10. Hipérbola $1/x$ (impar, pasa por I y III cuadrante) vs. $1/x^2$ (par, siempre positiva).

7. Transformaciones de funciones

Una idea poderosa en matemáticas es que muchas funciones complejas pueden obtenerse a partir de funciones simples mediante **transformaciones**. Conociendo el gráfico de f , podemos deducir el gráfico de versiones modificadas sin calcular desde cero.

Resumen de transformaciones: Sea f una función y $a, b, c, d > 0$.

Función	Transformación	Efecto
$f(x) + b$	Traslación vertical	Sube b unidades
$f(x) - b$	Traslación vertical	Baja b unidades
$f(x - a)$	Traslación horizontal	Desplaza a unidades a la derecha
$f(x + a)$	Traslación horizontal	Desplaza a unidades a la izquierda
$-f(x)$	Reflexión	Respecto del eje x
$f(-x)$	Reflexión	Respecto del eje y
$c \cdot f(x)$ ($c > 1$)	Escalado vertical	Estiramiento vertical
$c \cdot f(x)$ ($0 < c < 1$)	Escalado vertical	Compresión vertical
$f(d \cdot x)$ ($d > 1$)	Escalado horizontal	Compresión horizontal
$f(d \cdot x)$ ($0 < d < 1$)	Escalado horizontal	Estiramiento horizontal
$ f(x) $	Valor absoluto	Refleja la parte negativa sobre el eje x

7.1. Traslación vertical

Definición — Traslación vertical

$g(x) = f(x) + b$: desplaza el gráfico b unidades **hacia arriba** si $b > 0$, y $|b|$ unidades **hacia abajo** si $b < 0$.

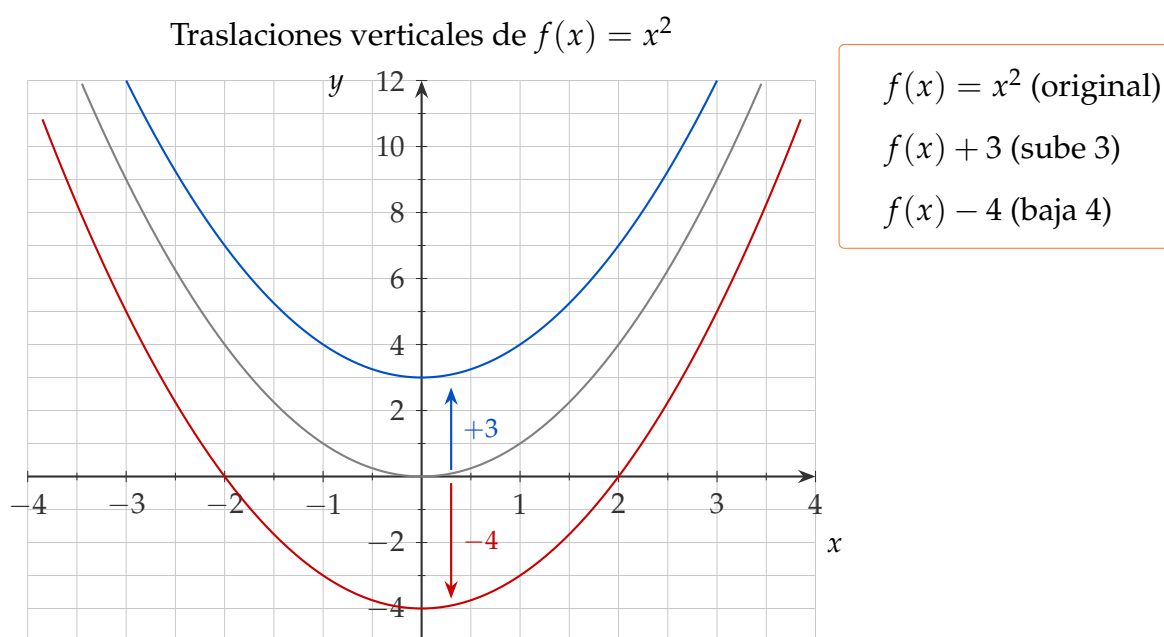


Figura 11. La forma de la parábola no cambia, solo sube o baja.

7.2. Traslación horizontal

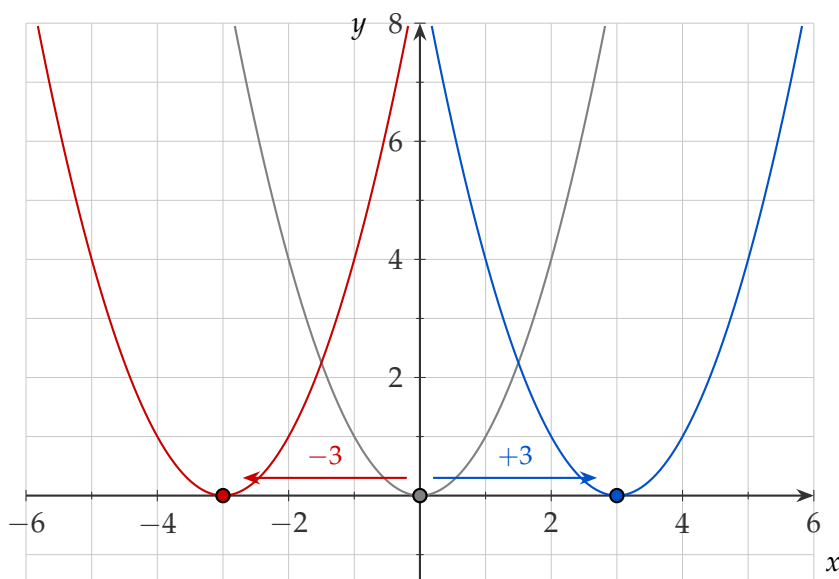
Definición — Traslación horizontal

$g(x) = f(x - a)$: desplaza el gráfico a unidades a la **derecha** si $a > 0$, y $|a|$ unidades a la **izquierda** si $a < 0$.

Nota importante

La dirección de la traslación horizontal es **contraintuitiva**: $f(x - 2)$ va a la *derecha* y $f(x + 2)$ va a la *izquierda*. Para recordarlo: en $f(x - a)$, la función “espera” a que x llegue a a para comportarse como $f(0)$ lo hacía en el origen.

Traslaciones horizontales de $f(x) = x^2$



$$f(x) = x^2$$

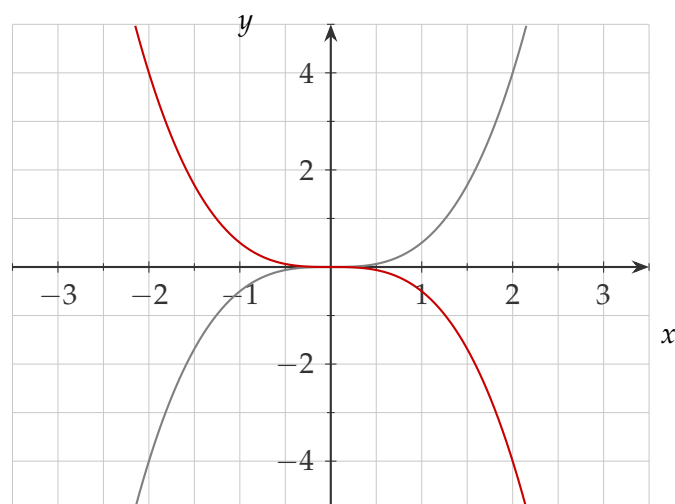
$$f(x - 3) \text{ (derecha 3)}$$

$$f(x + 3) \text{ (izquierda 3)}$$

7.3. Reflexiones

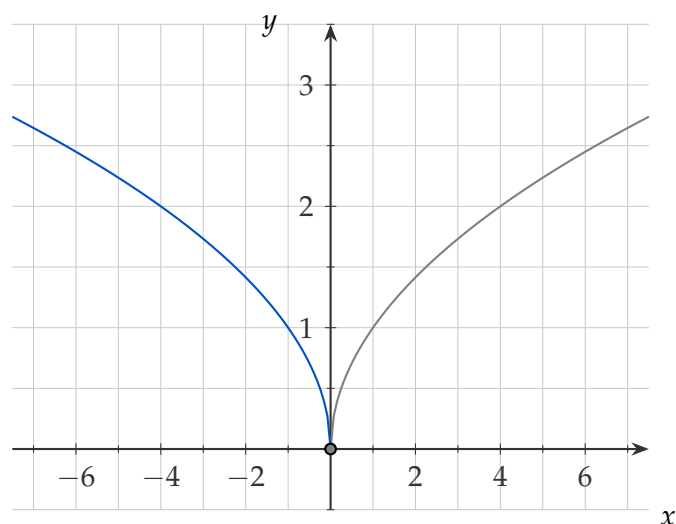
Definición — Reflexiones

- $g(x) = -f(x)$: reflexión respecto del **eje x** (cada punto (x, y) va a $(x, -y)$).
- $g(x) = f(-x)$: reflexión respecto del **eje y** (cada punto (x, y) va a $(-x, y)$).

Reflexión respecto de eje x 

$$\text{— } f(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$\text{— } g(x) = -f(x)$$

Reflexión respecto de eje y 

$$\text{— } f(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{— } g(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$$

Figura 12. Reflexiones: el eje de reflexión actúa como espejo.

7.4. Escalados (cambios de escala)

Definición — Escalados vertical y horizontal

Sea $c > 0$:

- $g(x) = c f(x)$: escalado vertical. Si $c > 1$: estiramiento. Si $0 < c < 1$: compresión.
- $g(x) = f(cx)$: escalado horizontal. Si $c > 1$: compresión. Si $0 < c < 1$: estiramiento.

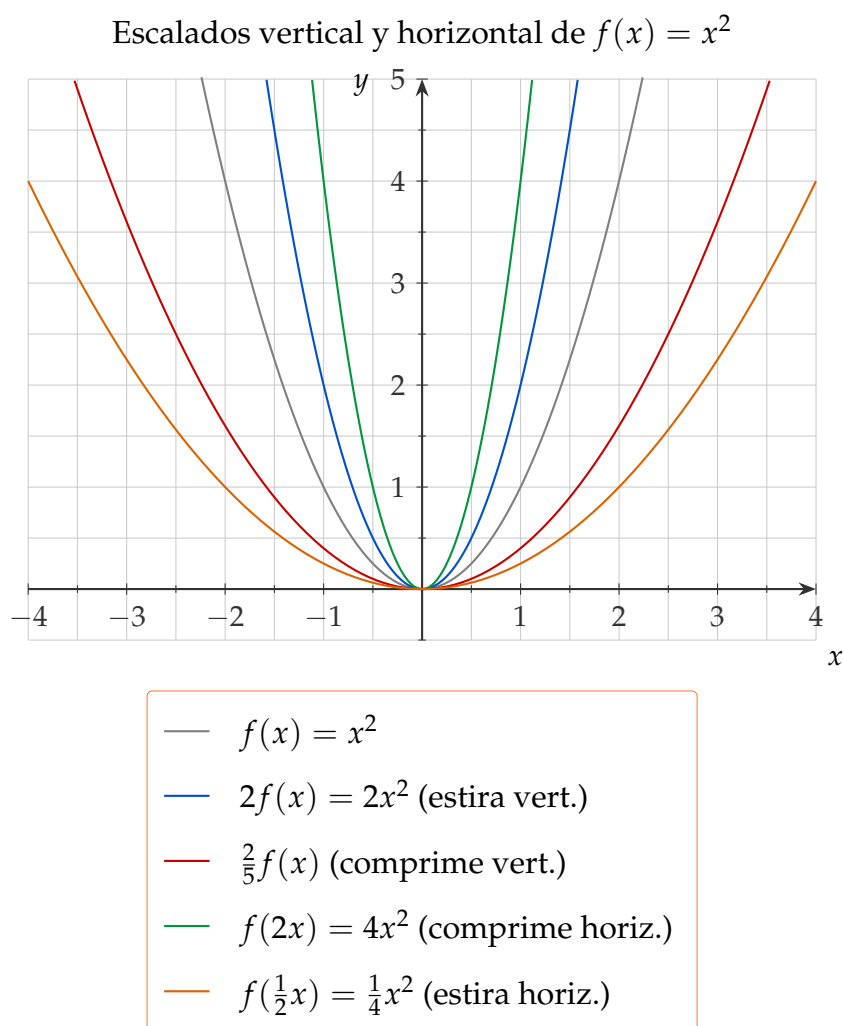


Figura 13. Comparación de escalados. El escalado vertical afecta las alturas; el horizontal afecta los anchos.

7.5. Transformación de valor absoluto

$g(x) = |f(x)|$: las partes del gráfico que están **debajo del eje x** se reflejan hacia arriba; las partes sobre el eje quedan iguales.

Aplicación del valor absoluto: $g(x) = |x^2 - 2x - 3|$

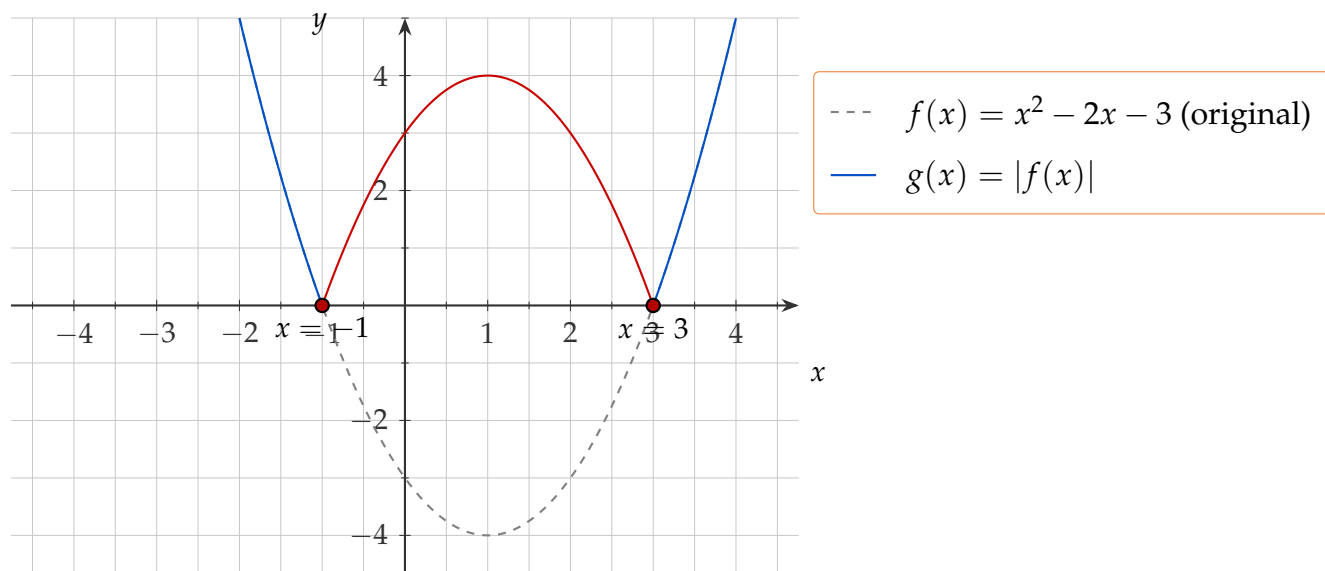


Figura 14. La porción entre $x = -1$ y $x = 3$ (donde $f < 0$) se refleja hacia arriba.

7.6. Combinaciones de transformaciones

Orden correcto de aplicación

Para graficar $g(x) = c f(d(x - a)) + b$, aplicar en este orden:

1. Traslación horizontal en a unidades (dentro del argumento, más cercano a x).
2. Escalado horizontal por d .
3. Escalado vertical por c (y reflexión si $c < 0$).
4. Traslación vertical en b unidades (más alejada de x).

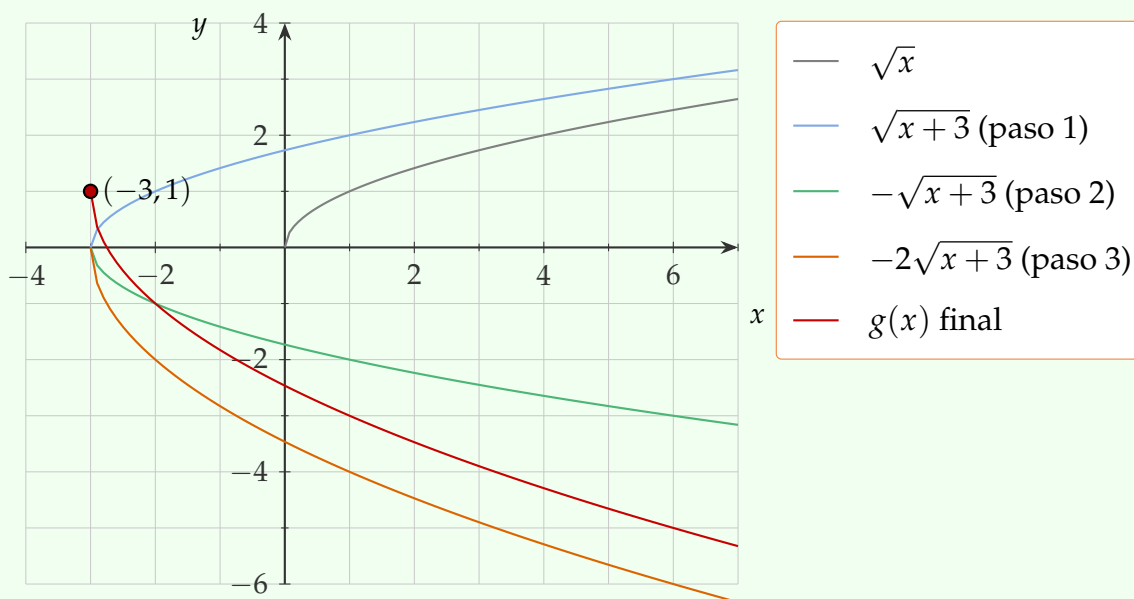
Ejemplo — Combinación de transformaciones

Graficar $g(x) = -2\sqrt{x+3} + 1$ a partir de $f(x) = \sqrt{x}$.

Pasos:

1. $\sqrt{x+3}$: traslación 3 unidades a la **izquierda**.
2. $-\sqrt{x+3}$: reflexión respecto del eje x .
3. $-2\sqrt{x+3}$: escalado vertical por 2 (estiramiento).
4. $-2\sqrt{x+3} + 1$: traslación 1 unidad hacia **arriba**.

Construcción de $g(x) = -2\sqrt{x+3} + 1$



$\text{Dom}(g) = [-3, +\infty)$. $\text{Img}(g) = (-\infty, 1]$.

8. Funciones monótonas: crecimiento y decrecimiento

Definición — Función creciente, decreciente y constante

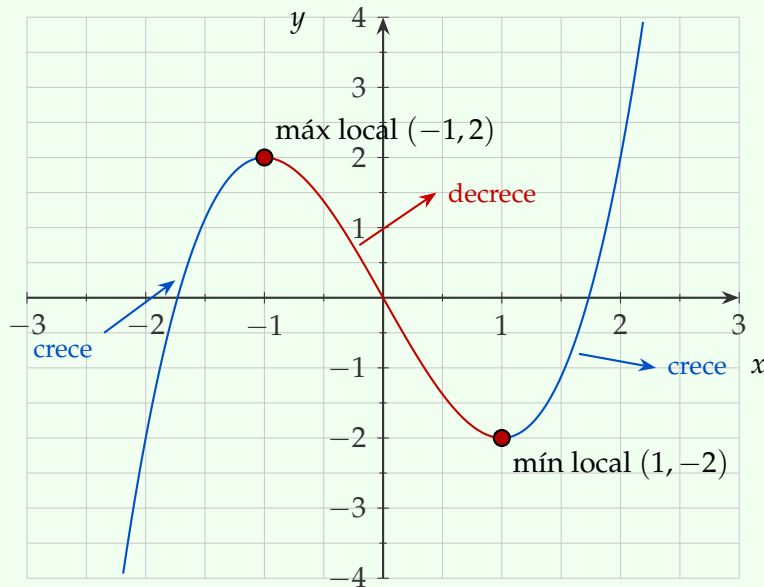
Sea f definida en un intervalo I .

- f es **creciente** en I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f es **decreciente** en I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$.

Ejemplo — Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para $f(x) = x^3 - 3x$:

$$f(x) = x^3 - 3x: \text{crecimiento y decrecimiento}$$



f crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; decrece en $(-1, 1)$.

9. Máximos y mínimos relativos (locales)

Definición — Máximos y mínimos locales

Sea f definida en (a, b) y sea $c \in (a, b)$.

- $f(c)$ es un **máximo local** (relativo) si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún entorno de c .
- $f(c)$ es un **mínimo local** (relativo) si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en algún entorno de c .

Nota importante

Un máximo o mínimo local es el valor más alto o más bajo de la función en una *vecindad* del punto, pero no necesariamente en todo el dominio. El valor más alto (o bajo) en todo el dominio se llama máximo (mínimo) **global** o absoluto.

10. Funciones definidas a trozos

Definición — Función definida a trozos

Una función definida a **trozos** (o por partes) es aquella cuya regla de correspondencia está dada por expresiones diferentes en distintas porciones del dominio.

Ejemplo — Función a trozos: definición y gráfico

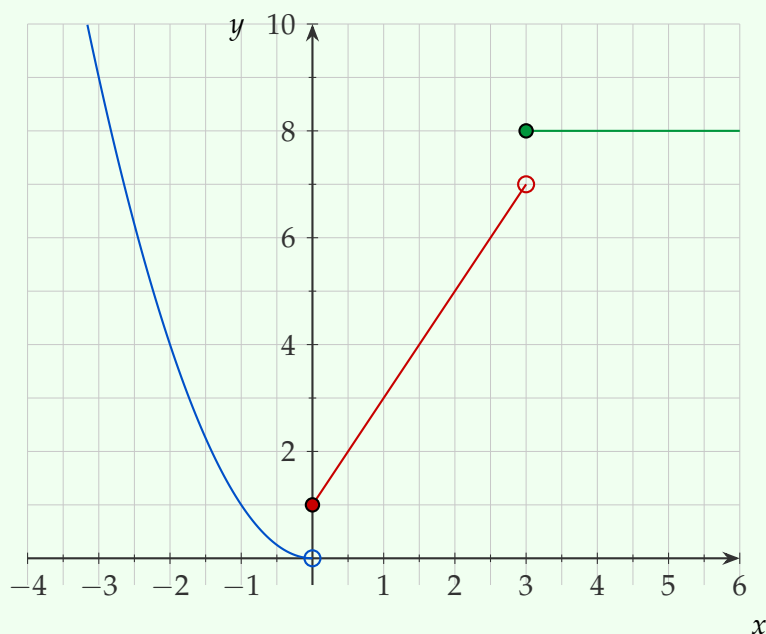
Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ 2x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ 8 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Calcular $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$:

- $f(-2) = (-2)^2 = 4$.
- $f(0) = 2(0) + 1 = 1$.
- $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.
- $f(3) = 8$ (usar la tercera rama, ya que $3 \geq 3$).
- $f(5) = 8$.

Función definida a trozos



$$\begin{aligned} x^2 & (x < 0) \\ 2x + 1 & (0 \leq x < 3) \\ 8 & (x \geq 3) \end{aligned}$$

Figura 15. Los círculos huecos indican que ese extremo **no** pertenece al trozo.

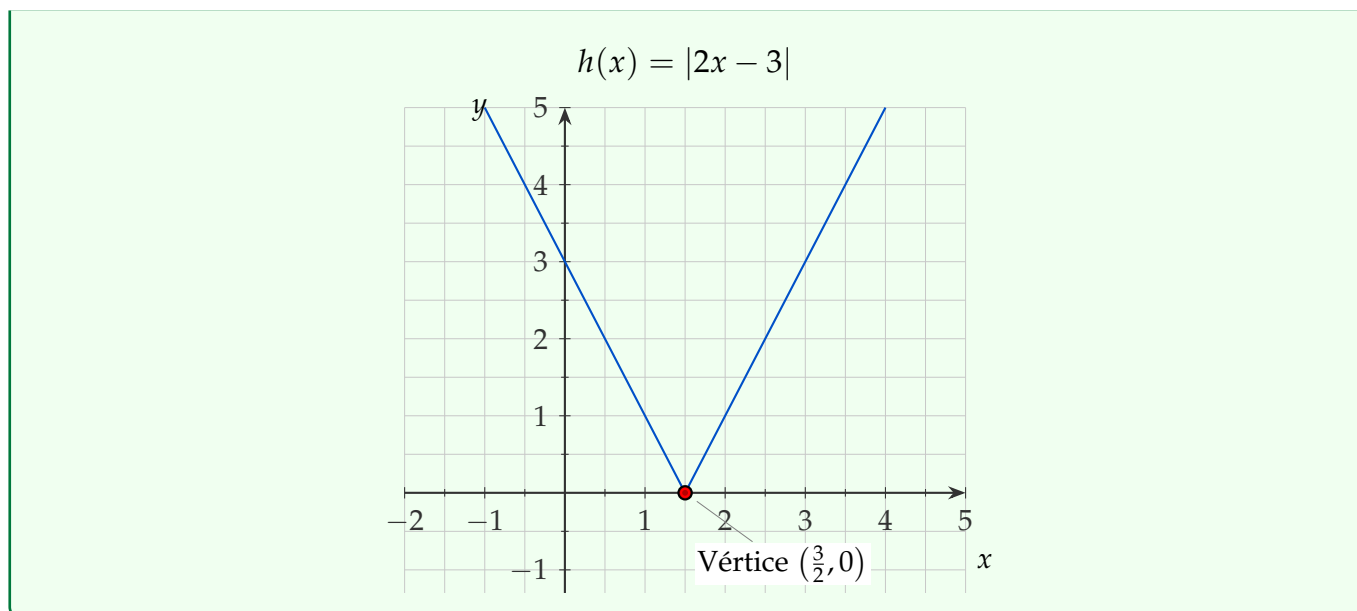
Ejemplo — La función de valor absoluto como función a trozos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta es la representación por trozos de la función valor absoluto. A partir de ella se pueden analizar funciones como $|2x - 3|$, $|x^2 - 4|$, etc.

Graficar $h(x) = |2x - 3|$:Resolvemos $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$. Luego:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geq 3/2, \\ -(2x - 3) = 3 - 2x & \text{si } x < 3/2. \end{cases}$$



11. Operaciones con funciones

Definición — Operaciones algebraicas entre funciones

Sean f y g funciones con dominios D_f y D_g respectivamente. Para $x \in D_f \cap D_g$ (y $g(x) \neq 0$ en la división):

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ejemplo — Operaciones con funciones

Sea $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{4-x}$.

$$D_f = [-2, +\infty), D_g = (-\infty, 4], D_f \cap D_g = [-2, 4].$$

a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}$, $\text{Dom} = [-2, 4]$.

b) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{(x+2)(4-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$, $\text{Dom} = [-2, 4]$.

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$, $\text{Dom} = [-2, 4)$ (excluye $x = 4$ por denominador nulo).

11.1. Composición de funciones

Definición — Función compuesta

Dadas $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$, la **composición** $f \circ g$ es la función definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

con $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) \in \text{Dom}(f)\}$.

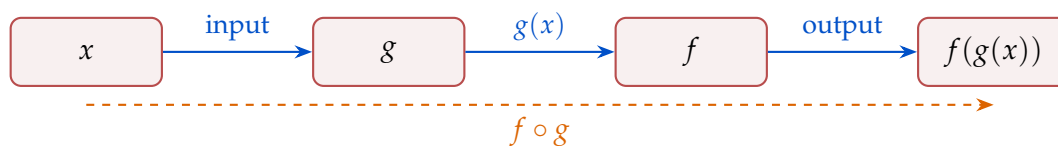


Figura 16. Diagrama de la composición $f \circ g$.

Ejemplo — Composición de funciones

Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 2}) = (\sqrt{x - 2})^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$.

Dom: necesitamos $x - 2 \geq 0$, es decir $x \geq 2$. $\text{Dom}(f \circ g) = [2, +\infty)$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Dom: necesitamos $x^2 - 1 \geq 0$, es decir $|x| \geq 1$. $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Nota importante

En general $f \circ g \neq g \circ f$. La composición **no** es conmutativa.

Ejemplo — Descomposición en funciones simples

Expresar $h(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 3}$ como composición $h = f \circ g$.

Elegimos $g(x) = 5x^2 - 3$ y $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

Verificación: $f(g(x)) = (5x^2 - 3)^{1/3} = \sqrt[3]{5x^2 - 3} = h(x)$. ✓

12. Síntesis: propiedades de las funciones elementales

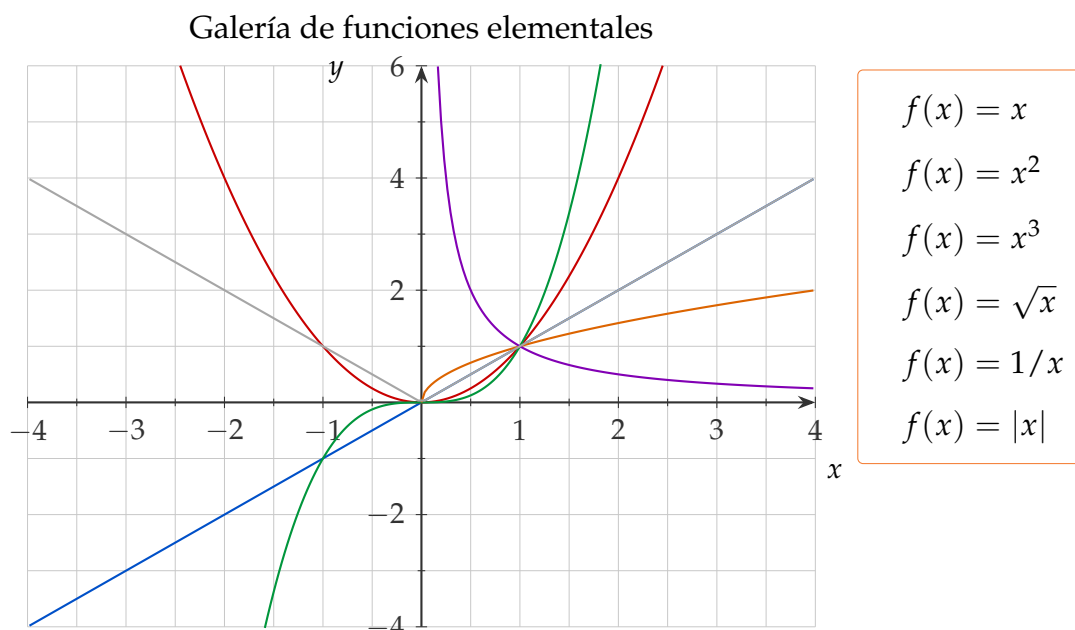


Figura 17. Las seis funciones elementales básicas en un mismo sistema de coordenadas.

Función	Dom	Img	Par/Impar	Monotonía
$f(x) = c$	\mathbb{R}	$\{c\}$	Par ($c = 0$: ambas)	Constante
$f(x) = x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	Impar	Creciente en \mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$[0, +\infty)$	Par	Dec. $(-\infty, 0]$, Crec. $[0, +\infty)$
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	Impar	Creciente en \mathbb{R}
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	(ni par ni impar)	Creciente
$f(x) = 1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Impar	Dec. en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
$f(x) = x $	\mathbb{R}	$[0, +\infty)$	Par	Dec. $(-\infty, 0]$, Crec. $[0, \infty)$

Bibliografía y referencias

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 7th ed. Cengage Learning, 2016.
- Larson, R., & Hostetler, R. P. *Precalculus*, 8th ed. Houghton Mifflin, 2011.
- Sullivan, M. *Precalculus*, 10th ed. Pearson, 2016.
- Swokowski, E., & Cole, J. *Precalculus: Functions and Graphs*, 12th ed. Cengage Learning, 2012.
- Apostol, T. M. *Calculus*, Vol. I, 2nd ed. Wiley, 1967.
- Spivak, M. *Calculus*, 4th ed. Publish or Perish, 2008.
- Lang, S. *A First Course in Calculus*, 5th ed. Springer, 1986.